

Approfondissement

Suites arithmétiques et géométriques

Pour aller plus loin : démonstrations, somme des carrés, tours de Hanoï, suite auxiliaire, emprunt, flocon de Koch

6 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée

Exercice 1 Démontrer les formules du terme général

●●●

- 1.1** Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et $n \geq 1$ un entier. En additionnant membre à membre les n égalités $u_1 - u_0 = r$, $u_2 - u_1 = r$, ..., $u_n - u_{n-1} = r$, démontrer que $u_n = u_0 + nr$.
- 1.2** Soit (v_n) une suite géométrique de raison q . En écrivant v_1, v_2, v_3 en fonction de v_0 , expliquer pourquoi $v_n = v_0 q^n$.
- 1.3** En déduire que, pour tous entiers $n \geq p \geq 0$: $u_n = u_p + (n - p)r$ et $v_n = v_p q^{n-p}$.
- 1.4** Somme de termes consécutifs. Avec les notations précédentes et $n \geq p$, on pose $N = n - p + 1$. En écrivant $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = Nu_p + r(1 + 2 + \dots + (N - 1))$, démontrer que

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = N \times \frac{u_p + u_n}{2}.$$

Établir de même, pour $q \neq 1$, que $v_p + v_{p+1} + \dots + v_n = v_p \times \frac{1 - q^N}{1 - q}$.

Exercice 2 La somme des carrés

●●●

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $C_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$.

- 2.1** Développer $(k + 1)^3 - k^3$ pour tout entier k .
- 2.2** En écrivant cette égalité pour $k = 1, 2, \dots, n$ et en additionnant membre à membre, démontrer que $(n + 1)^3 - 1 = 3C_n + 3 \times \frac{n(n + 1)}{2} + n$.
- 2.3** En déduire que $C_n = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$. Vérifier la formule pour $n = 1, 2$ et 3 .
- 2.4** Combien de carrés sur un échiquier ? On compte les carrés formés de cases entières du quadrillage. Justifier qu'un quadrillage de 8×8 cases contient 64 carrés de côté 1, 49 carrés de côté 2, etc. Combien contient-il de carrés au total ?
- 2.5** Un marchand empile des oranges en pyramide à base carrée : 1 orange au sommet, 4 à l'étage suivant, 9 en dessous, etc. Combien d'oranges faut-il pour une pyramide de 12 étages ?

Exercice 3 Les tours de Hanoï

●●●

On dispose de trois piquets et de n disques de tailles différentes, empilés au départ sur le piquet de gauche du plus grand au plus petit. Le but est de déplacer toute la pile sur le piquet de droite, en ne déplaçant qu'un disque à la fois et sans jamais poser un disque sur un disque plus petit. On note h_n le nombre minimal de déplacements nécessaires.

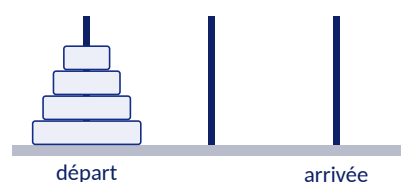


Figure 1 — Tours de Hanoï à 4 disques

- 3.1** Déterminer h_1, h_2 et h_3 en décrivant les déplacements.

- 3.2** Pour déplacer $n + 1$ disques, on déplace les n disques supérieurs sur le piquet du milieu, puis le grand disque, puis à nouveau les n disques. En admettant que cette stratégie est optimale, justifier que $h_{n+1} = 2h_n + 1$.
- 3.3** On pose $v_n = h_n + 1$ pour tout $n \geq 1$. Démontrer que (v_n) est géométrique, puis que $h_n = 2^n - 1$.
- 3.4** La légende raconte que des moines déplacent 64 disques d'or, à raison d'un disque par seconde. Estimer, en années, la durée nécessaire. Comparer à l'âge de l'Univers (environ 13,8 milliards d'années).

Exercice 4 Une suite arithmético-géométrique



Une médiathèque compte 400 inscrits en 2026. Chaque année, 80 % des inscrits renouvellent leur inscription et 50 nouveaux lecteurs s'inscrivent. On note u_n le nombre d'inscrits en l'année $2026 + n$, de sorte que $u_0 = 400$ et $u_{n+1} = 0,8 u_n + 50$.

- 4.1** Calculer u_1 et u_2 . La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
- 4.2** On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 250$. Démontrer que (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
- 4.3** En déduire que $u_n = 250 + 150 \times 0,8^n$, puis le sens de variation de la suite (u_n) .
- 4.4** Calculer u_{10} et u_{20} arrondis à l'unité. Vers quelle valeur le nombre d'inscrits semble-t-il se stabiliser ? D'où vient le nombre 250 ? (On cherchera le réel ℓ tel que $\ell = 0,8 \ell + 50$.)
- 4.5** Chaque inscrit paie 15 euros par an. Calculer le montant total des cotisations perçues de 2026 à 2035 inclus, arrondi à l'euro.

Exercice 5 L'emprunt à annuités constantes



Nour emprunte $C = 10\,000$ euros au taux annuel de 4 % et rembourse à la fin de chaque année une même somme a (l'annuité). On note $R_0 = C$ et R_k le capital restant dû après le versement de la k -ième annuité : chaque année, il augmente de 4 % d'intérêts, puis diminue de a .

- 5.1** Justifier que, pour tout entier naturel k , $R_{k+1} = 1,04 R_k - a$.
- 5.2** On pose $w_k = R_k - 25a$. Démontrer que (w_k) est géométrique de raison 1,04, puis que $R_k = 25a + (10\,000 - 25a) \times 1,04^k$.
- 5.3** Le prêt est remboursé en 5 ans, c'est-à-dire $R_5 = 0$. Montrer que $a = \frac{400 \times 1,04^5}{1,04^5 - 1}$, puis calculer a au centime près. Quel est le coût total du crédit (intérêts payés) ?
- 5.4** Avec les mêmes conditions, quelle est la durée minimale, en années entières, d'un remboursement dont l'annuité ne dépasse pas 1 500 euros ?

Exercice 6 Le flocon de von Koch



On part d'un triangle équilatéral de côté 1 (étape 0). Pour passer à l'étape suivante, on partage chaque côté en trois segments égaux et on construit, vers l'extérieur, un triangle équilatéral sur le segment du milieu, que l'on efface ensuite. On note N_n le nombre de côtés, ℓ_n la longueur d'un côté et P_n le périmètre de la figure à l'étape n .

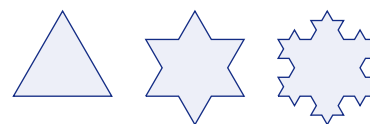


Figure 2 — Étapes 0, 1 et 2

- 6.1** Justifier que (N_n) et (ℓ_n) sont géométriques, puis exprimer N_n , ℓ_n et P_n en fonction de n . Que peut-on conjecturer sur le périmètre lorsque n devient grand ?
- 6.2** On rappelle qu'un triangle équilatéral de côté c a pour aire $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$. Montrer que l'aire ajoutée pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$ vaut $\frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^n$.
- 6.3** En déduire que l'aire A_n de la figure à l'étape n vérifie $A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$. Conclure : l'aire reste-t-elle bornée ?