

# Contrôle B Second degré

Démonstration guidée des formules, vrai ou faux, trajectoire d'un jet d'eau, le cadre photo, carrés d'entiers consécutifs

Durée : 1 h · sans calculatrice · 5 exercices indépendants · barème sur 20

Nom : ..... Prénom : ..... Classe : ..... Note : ..... / 20

## ★ CONSIGNES

La calculatrice n'est pas autorisée. Tout résultat doit être justifié ; dans l'exercice 2, une réponse « vrai » ou « faux » non justifiée ne rapporte aucun point. Les résultats sont donnés sous forme exacte. La qualité de la rédaction et la rigueur des démonstrations sont prises en compte dans la notation.

## Exercice 1 Démonstration : résoudre une équation du second degré

5 pts ●●●○

Soit  $a, b, c$  trois réels avec  $a \neq 0$ , et  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . On pose  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

- 1.1** Démontrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ .
- 1.2** On suppose  $\Delta < 0$ . Justifier que, pour tout réel  $x$ ,  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ . En déduire que l'équation  $f(x) = 0$  n'a pas de solution réelle.
- 1.3** On suppose  $\Delta = 0$ . Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution, que l'on précisera.
- 1.4** On suppose  $\Delta > 0$ . En remarquant que  $\frac{\Delta}{4a^2} = \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2$  et à l'aide de l'identité  $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ , démontrer que  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$  avec  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ . Conclure.
- 1.5** Application, **sans utiliser les formules** : vérifier que  $4x^2 - 4x - 15 = 4 \left[ \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 - 4 \right]$ , puis résoudre l'équation  $4x^2 - 4x - 15 = 0$ .

## Exercice 2 Vrai ou faux ?

5 pts ●●●○

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse. Un contre-exemple suffit pour justifier qu'une affirmation est fausse.

- 2.1** Si un trinôme du second degré a pour racines 2 et  $-3$ , alors il est égal à  $x^2 + x - 6$ .
- 2.2** Si les réels  $a$  et  $c$  sont non nuls et de signes contraires, alors le trinôme  $ax^2 + bx + c$  admet deux racines distinctes.
- 2.3** L'équation  $x^2 - 2026x + 2025 = 0$  a pour solutions 1 et 2025.
- 2.4** Pour tout réel  $x$ ,  $-2x^2 + 8x - 5 \leq 2$ .
- 2.5** La fonction polynôme du second degré qui s'annule en 1 et en 3 et qui prend la valeur 3 en 0 admet pour minimum  $-1$ .

### Exercice 3 Le jet d'eau

4 pts ●●●○

Un arroseur de jardin, posé au sol, projette un jet d'eau. Dans le plan vertical du jet, on repère un point du jet par sa distance horizontale  $x$  à l'arroseur et par sa hauteur  $h(x)$  au-dessus du sol, toutes deux en mètres. On admet que, pour  $x \in [0 ; 12]$  :  $h(x) = -0,1x^2 + 1,2x$ . La figure 1 représente la trajectoire du jet.

- 3.1** Lire graphiquement la hauteur maximale atteinte par le jet et la distance à laquelle l'eau retombe au sol.
- 3.2** Factoriser  $h(x)$ , puis retrouver par le calcul la distance à laquelle l'eau retombe au sol.
- 3.3** Montrer que, pour tout réel  $x$  de  $[0 ; 12]$ ,  $h(x) = -0,1(x - 6)^2 + 3,6$ . En déduire la hauteur maximale atteinte par le jet et la distance horizontale à laquelle elle est atteinte.
- 3.4** Une haie de 2,7 m de haut doit être arrosée par le dessus. Déterminer par le calcul les distances à l'arroseur pour lesquelles le jet se trouve à une hauteur supérieure ou égale à 2,7 m.

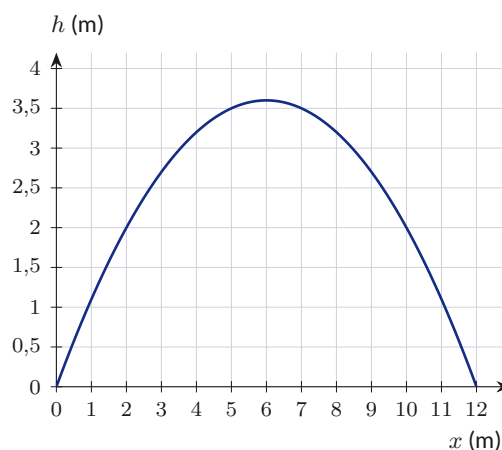


Figure 1 — Trajectoire du jet d'eau

- 3.5** On règle l'arroseur pour que la trajectoire du jet soit donnée par  $h_k(x) = -kx^2 + 1,2x$ , où  $k$  est un réel strictement positif. Déterminer  $k$  pour que l'eau retombe exactement dans un bassin situé à 10 m de l'arroseur. Quelle est alors la hauteur maximale du jet ?

### Exercice 4 Le cadre photo

3 pts ●●●○

Une photo rectangulaire de 20 cm sur 30 cm est entourée d'une bordure de largeur constante  $x$  cm, avec  $x > 0$ . L'ensemble (photo et bordure) forme un rectangle (figure 2).

- 4.1** Exprimer en fonction de  $x$  les dimensions de l'ensemble, puis démontrer que l'aire de la bordure, en  $\text{cm}^2$ , est  $B(x) = 4x^2 + 100x$ .
- 4.2** Déterminer la largeur de la bordure pour que son aire soit égale à celle de la photo.
- 4.3** Pour des raisons de coût, l'aire de la bordure doit être strictement inférieure à  $336 \text{ cm}^2$ . Quelles sont les largeurs possibles ?
- 4.4** Un client souhaite que le rapport de la longueur à la largeur de l'ensemble soit égal à  $\frac{4}{3}$ . Est-ce possible ? Si oui, cette bordure respecte-t-elle la contrainte de coût de la question 4.3 ?

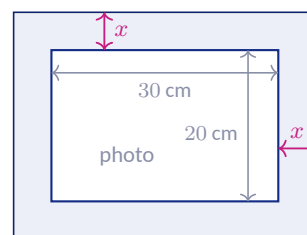


Figure 2 — Photo et bordure

### Exercice 5 Carrés d'entiers consécutifs

3 pts ●●●○

- 5.1** Déterminer tous les couples d'entiers relatifs consécutifs dont la somme des carrés est égale à 365.
- 5.2** Existe-t-il trois entiers naturels consécutifs dont la somme des carrés est égale à 365 ? Si oui, les déterminer.
- 5.3** Existe-t-il deux entiers consécutifs dont la somme des carrés est égale à 2026 ? Justifier.