

Approfondissement Second degré

Pour aller plus loin : degré 3, factorisation de $x^n - a^n$, équations bicarrées, paramètre, somme et produit, inégalité de Cauchy-Schwarz

6 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 2 h 30 · sans calculatrice

Exercice 1 Un polynôme du troisième degré dont on connaît une racine

●●●

On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$.

- 1.1 Vérifier que 3 est une racine de P .
- 1.2 Déterminer trois réels a , b et c tels que, pour tout réel x , $P(x) = (x - 3)(ax^2 + bx + c)$.
- 1.3 En déduire une écriture de $P(x)$ comme produit de trois facteurs du premier degré, puis résoudre l'équation $P(x) = 0$.
- 1.4 Dresser le tableau de signes de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis résoudre l'inéquation $P(x) > 0$.
- 1.5 Soit $Q(x) = x^3 - 7x + 6$. Trouver une racine « évidente » de Q parmi -1 , 0 , 1 et 2 , factoriser $Q(x)$, puis résoudre l'inéquation $Q(x) \leq 0$.
- 1.6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = Q(x)$.

Exercice 2 Factoriser $x^n - a^n$

●●●

Dans tout l'exercice, a désigne un nombre réel et n un entier supérieur ou égal à 2.

- 2.1 Développer $(x - a)(x^2 + ax + a^2)$. En déduire que l'équation $x^3 = 27$ admet une unique solution réelle.
- 2.2 Démontrer que, pour tout réel x : $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$.
- 2.3 Factoriser $x^4 - 16$ de deux façons : à l'aide de la question 2.2, puis à l'aide de l'identité $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$. Résoudre l'équation $x^4 = 16$.
- 2.4 En choisissant $a = 1$, démontrer que pour tout réel $q \neq 1$: $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$. En déduire la valeur de $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 1\,024$.
- 2.5 Démontrer, sans calculer 2^{12} , que le nombre $2^{12} - 1$ est divisible par 7, par 3 et par 15.

Exercice 3 Équations bicarrées et changement d'inconnue

●●●

Une équation *bicarrée* est une équation de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$ avec $a \neq 0$. On la résout en posant $X = x^2$.

- 3.1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

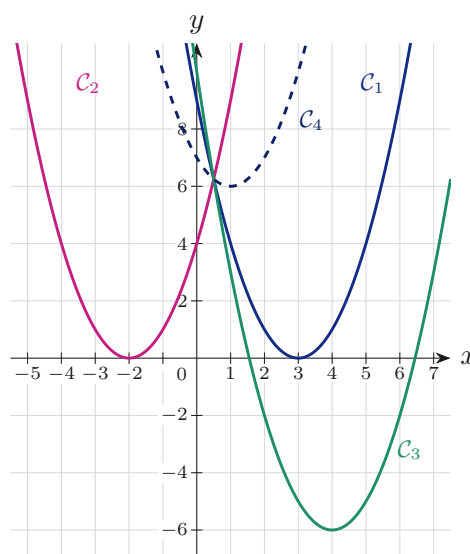
a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$	b) $x^4 + x^2 - 20 = 0$
c) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$	d) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$
- 3.2 Justifier qu'une équation bicarrée admet au plus quatre solutions réelles. Déterminer une équation bicarrée dont les solutions sont exactement -3 , -1 , 1 et 3 .
- 3.3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3 = 0$ à l'aide d'un changement d'inconnue adapté.
- 3.4 Résoudre dans $[0; +\infty[$ l'équation $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$.
- 3.5 Discuter, selon les valeurs du réel k , le nombre de solutions réelles de l'équation $x^4 - 4x^2 + k = 0$. On pourra utiliser la somme et le produit des solutions de l'équation $X^2 - 4X + k = 0$ pour déterminer leurs signes.

Exercice 4 Une famille de trinômes dépendant d'un paramètre



Pour tout réel m , on considère la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = x^2 - 2mx + m + 6$. Les courbes C_1, C_2, C_3 et C_4 ci-contre représentent les fonctions f_{-2}, f_1, f_3 et f_4 , dans le désordre.

- 4.1 Démontrer que $f_m(x) = (x - m)^2 - m^2 + m + 6$. En déduire la valeur de x en laquelle f_m atteint son minimum, puis associer chaque courbe à la fonction qu'elle représente.
- 4.2 Démontrer que le discriminant de f_m est $\Delta_m = 4(m + 2)(m - 3)$.
- 4.3 Discuter, selon les valeurs de m , le nombre de solutions de l'équation $f_m(x) = 0$. Préciser la solution lorsqu'elle est unique, et vérifier la cohérence avec la figure. Pour quelles valeurs de m a-t-on $f_m(x) > 0$ pour tout réel x ?
- 4.4 Déterminer m pour que 1 soit solution de $f_m(x) = 0$, puis trouver l'autre solution sans calculer de discriminant.
- 4.5 Déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'équation $f_m(x) = 0$ admet deux solutions distinctes strictement positives.
- 4.6 Démontrer que toutes les courbes représentant les fonctions f_m passent par un même point, dont on précisera les coordonnées.



Exercice 5 Deux nombres dont on connaît la somme et le produit



Soit s et p deux réels.

- 5.1 Démontrer que deux réels u et v vérifient $u + v = s$ et $uv = p$ si et seulement si u et v sont les solutions (éventuellement égales) de l'équation $X^2 - sX + p = 0$. En déduire que de tels réels existent si et seulement si $s^2 \geq 4p$.
- 5.2 Déterminer les dimensions d'un rectangle de périmètre 34 cm et d'aire 60 cm^2 . Existe-t-il un rectangle de périmètre 20 cm et d'aire 30 cm^2 ?
- 5.3 Démontrer que l'aire d'un rectangle de périmètre L est au plus égale à $\frac{L^2}{16}$. Pour quel rectangle cette valeur est-elle atteinte ?
- 5.4 Déterminer les réels x et y tels que $x + y = 9$ et $x^2 + y^2 = 41$.
- 5.5 On note x_1 et x_2 les solutions de l'équation $2x^2 - 6x + 1 = 0$. Sans calculer x_1 et x_2 , déterminer les valeurs de $x_1^2 + x_2^2$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ et $x_1^3 + x_2^3$.

Exercice 6 L'inégalité de Cauchy-Schwarz (hors programme — pour aller plus loin)



Soit a_1, a_2, b_1, b_2 quatre réels, avec a_1 et a_2 non tous deux nuls. Pour tout réel t , on pose $T(t) = (a_1t + b_1)^2 + (a_2t + b_2)^2$.

- 6.1 Montrer que $T(t) = (a_1^2 + a_2^2)t^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2)t + (b_1^2 + b_2^2)$: c'est un trinôme du second degré.
- 6.2 Justifier que $T(t) \geq 0$ pour tout réel t . En raisonnant par l'absurde, en déduire que le discriminant de T est négatif ou nul.
- 6.3 En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$.
- 6.4 Application : démontrer que, pour tous réels x et y tels que $x^2 + y^2 = 1$, on a $-5 \leq 3x + 4y \leq 5$. Trouver un couple $(x; y)$ pour lequel $3x + 4y = 5$.