

Exercices 1 Produit scalaire

Les bases : projection orthogonale, normes et cosinus, coordonnées, règles de calcul, Al-Kashi, cercle de diamètre $[AB]$

8 exercices · niveau ●○○ · durée conseillée : 2 h · sans calculatrice



R. RINGUET · 2026 – 2027

★ À RETENIR — Ce qu'il faut savoir faire à la fin de la feuille

- Calculer un produit scalaire par la méthode adaptée (projection, normes et angle, coordonnées, relation de Chasles) et utiliser les règles de calcul.
- Démontrer une orthogonalité; calculer un angle ou une longueur (formule d'Al-Kashi); déterminer les points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.

■ RAPPEL — Le formulaire du chapitre

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ sinon; $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- **Projection** : si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) , alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$, égal à $AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens, à $-AB \times AH$ sinon.
- **Règles** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$; $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$; $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$; $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$; $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$; $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
- **Base orthonormée** : si $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = \vec{u} \cdot \vec{i}$ et $y = \vec{u} \cdot \vec{j}$.
- **Al-Kashi** : dans un triangle ABC , $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$. Si I est le milieu de $[AB]$, alors pour tout point M , $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$; l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Exercice 1 Lire un produit scalaire sur un quadrillage

●○○

Sur le quadrillage ci-contre, l'unité de longueur est le côté d'un carreau. Calculer les produits scalaires suivants à l'aide de projections orthogonales, en précisant le projeté utilisé.

- | | |
|--|--|
| a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ | b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ |
| c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$ | d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BF}$ |
| e) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF}$ | f) $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{CA}$ |
| g) $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BC}$ | h) $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BE}$ |

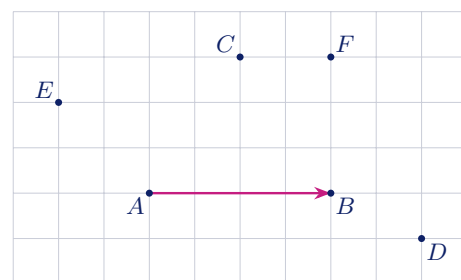


Figure 1 — Six points d'un quadrillage

Exercice 2 Avec les normes et un angle

●○○

2.1 Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans chacun des cas suivants.

- | | |
|--|---|
| a) $\ \vec{u}\ = 3$, $\ \vec{v}\ = 4$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$ | b) $\ \vec{u}\ = 2$, $\ \vec{v}\ = 5$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{3\pi}{4}$ |
| c) $\ \vec{u}\ = \sqrt{3}$, $\ \vec{v}\ = 4$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{5\pi}{6}$ | d) $\ \vec{u}\ = 6$, $\ \vec{v}\ = 2$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$ |

2.2 ABC est un triangle équilatéral de côté 6. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, puis $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ (attention à l'angle!).

2.3 $EFGH$ est un carré de côté 5. Calculer EG , puis $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{FH}$.

Exercice 3 Dans une base orthonormée

●○○

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u}(3; -2)$, $\vec{v}(4; 6)$, $\vec{w}(-1; 5)$ et $\vec{t}(10; 2)$.

- 3.1** Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$, $\vec{v} \cdot \vec{w}$ et $\vec{w} \cdot \vec{t}$, puis $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{w}\|$. Quels sont les couples de vecteurs orthogonaux?
- 3.2** Déterminer le réel m tel que les vecteurs $\vec{a}(m; 3)$ et $\vec{b}(2; -4)$ soient orthogonaux; même question pour $\vec{c}(m; m+1)$ et $\vec{d}(3; -1)$.
- 3.3** Un vecteur $\vec{p}$ vérifie $\vec{p} \cdot \vec{i} = -2$ et $\vec{p} \cdot \vec{j} = 7$. Donner ses coordonnées et sa norme.
- 3.4** On donne les points $A(1; 1)$, $B(4; 2)$ et $C(2; 3)$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, AB et AC , puis $\cos \widehat{BAC}$; en déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ en degrés. Même travail pour l'angle $(\vec{e}, \vec{f})$, où $\vec{e}(1; 2)$ et $\vec{f}(-3; -1)$.

Exercice 4 Règles de calcul

●○○

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifient $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. Calculer, en détaillant les règles utilisées :

- a) $(3\vec{u}) \cdot (-2\vec{v})$ b) $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ c) $(\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (3\vec{u} + \vec{v})$
 d) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ e) $\|2\vec{u} - \vec{v}\|^2$ f) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

Exercice 5 Des normes au produit scalaire

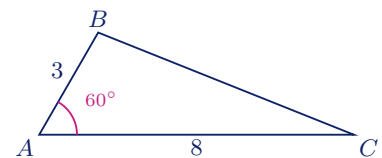
●●○

- 5.1** On sait que $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 7$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, puis $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.
- 5.2** On sait que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{7}$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, puis une mesure en degrés de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 6 La formule d'Al-Kashi

●●○

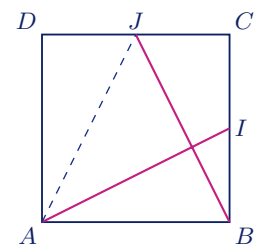
- 6.1** ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 8$ et $\widehat{BAC} = 60^\circ$ (figure 2). Calculer BC .
- 6.2** EFG est un triangle tel que $EF = 3$, $EG = 5$ et $FG = 7$. Quel est son plus grand angle? Calculer son cosinus, puis sa mesure en degrés.
- 6.3** Le triangle de côtés 6, 7 et 9 a-t-il un angle obtus? Justifier sans calculer d'angle.

Figure 2 — Triangle ABC **Exercice 7 Décomposer avec la relation de Chasles**

●●○

$ABCD$ est un carré de côté 4; I est le milieu de $[BC]$ et J celui de $[CD]$ (figure 3). On n'utilise pas de repère dans cet exercice.

- 7.1** Que valent $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DJ}$?
- 7.2** En écrivant $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}$, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$.
- 7.3** En écrivant de même $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}$, calculer $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$.
- 7.4** Calculer $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BJ}$. Que peut-on en déduire pour les droites (AI) et (BJ) ?

Figure 3 — Le carré $ABCD$ **Exercice 8 Les points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$**

●●○

A et B sont deux points tels que $AB = 6$, et I est le milieu de $[AB]$.

- 8.1** Démontrer que, pour tout point M , $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 9$ (écrire $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}$).
- 8.2** Déterminer et décrire l'ensemble des points M du plan tels que :
- a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 16$ c) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -9$ d) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -13$