

Contrôle B

 Produit scalaire

Vrai ou faux, un triangle rectangle à construire, un parallélogramme, perpendiculaires dans un carré et un rectangle

Durée : 1 h · sans calculatrice · 4 exercices indépendants · barème sur 20



R. RINGUET · 2026 – 2027

Nom : Prénom : Classe : Note : / 20

★ CONSIGNES

La calculatrice n'est pas autorisée. Tout résultat doit être justifié ; dans l'exercice 1, une réponse « vrai » ou « faux » non justifiée ne rapporte aucun point (un contre-exemple suffit pour justifier qu'une affirmation est fausse). Les résultats sont donnés sous forme exacte. La qualité de la rédaction et la rigueur des raisonnements sont prises en compte dans la notation.

Exercice 1 Vrai ou faux ?

4 pts ●●●○

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse.

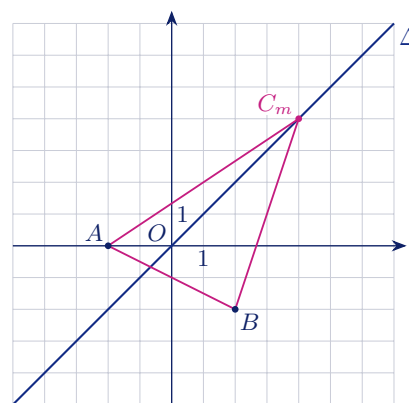
- 1.1 Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ avec $\vec{u}$ non nul, si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, alors $\vec{v} = \vec{w}$.
- 1.2 Si $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 5$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} \leq 15$.
- 1.3 Le triangle dont les côtés mesurent 4, 5 et 6 possède un angle obtus.
- 1.4 Un parallélogramme $ABCD$ est un losange si, et seulement si, $(\vec{AB} + \vec{AD}) \cdot (\vec{AB} - \vec{AD}) = 0$.

Exercice 2 Un triangle rectangle à construire

5 pts ●●●○

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-2; 0)$ et $B(2; -2)$, la droite Δ d'équation $y = x$ et, pour tout réel m , le point $C_m(m; m)$ de Δ (figure 1). On cherche les valeurs de m pour lesquelles le triangle ABC_m est rectangle.

- 2.1 Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC_m}$ en fonction de m . Pour quelle valeur de m le triangle ABC_m est-il rectangle en A ?
- 2.2 Même question pour un angle droit en B .
- 2.3 Démontrer que $\vec{C_m A} \cdot \vec{C_m B} = 2(m^2 + m - 2)$. En déduire les valeurs de m pour lesquelles le triangle ABC_m est rectangle en C_m .

Figure 1 — Le triangle ABC_m

- 2.4 Quel ensemble de points permet d'interpréter géométriquement le résultat de la question 2.3 ? Préciser son centre et son rayon, puis vérifier que les deux points obtenus lui appartiennent.
- 2.5 Dans le cas $m = 1$, préciser la nature du triangle ABC_1 et calculer son aire.

Exercice 3 Un parallélogramme

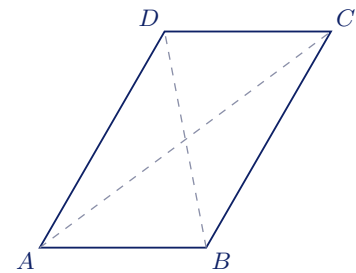
5 pts ●●●○

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 4$, $AD = 6$ et $BD = 2\sqrt{7}$ (figure 2).

3.1 En écrivant $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$, démontrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 12$.

3.2 En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAD}$.

3.3 Calculer la longueur de la diagonale $[AC]$.

Figure 2 — Le parallélogramme $ABCD$

3.4 On note H le projeté orthogonal de D sur la droite (AB) . Déduire de la question 3.1 la longueur AH ; le point H appartient-il au segment $[AB]$? Calculer DH , puis l'aire du parallélogramme $ABCD$.

3.5 Vérifier que $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$, puis démontrer que cette relation est vraie dans tout parallélogramme.

Exercice 4 Des perpendiculaires dans un carré et dans un rectangle

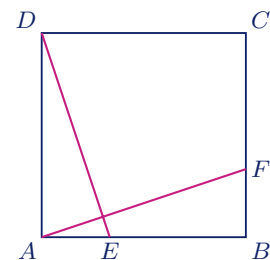
6 pts ●●●●

Partie A — Dans un carré

$ABCD$ est un carré de côté 6. Pour tout réel x de $[0; 6]$, on place le point E de $[AB]$ tel que $AE = x$ et le point F de $[BC]$ tel que $BF = x$ (figure 3).

4.1 Exprimer $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF}$ en fonction de x .

4.2 En déduire que, quelle que soit la position de E , les droites (DE) et (AF) sont perpendiculaires.

Figure 3 — Le carré $ABCD$

Partie B — Dans un rectangle

$ABCD$ est maintenant un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 3$. Pour tout réel x de $[0; 4]$, on note E le point de $[AB]$ tel que $AE = x$.

4.3 Déterminer la valeur de x pour laquelle les droites (DE) et (AC) sont perpendiculaires.

4.4 Démontrer que $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EC} = x^2 - 4x + 9$. Existe-t-il une position du point E sur $[AB]$ pour laquelle le triangle DEC est rectangle en E ?

4.5 On garde $AB = 4$, mais on ne fixe plus la largeur $AD = \ell$ du rectangle ($\ell > 0$). Pour quelles valeurs de ℓ existe-t-il au moins un point E de $[AB]$ tel que le triangle DEC soit rectangle en E ? Interpréter à l'aide d'un cercle.