

Contrôle B

Probabilités conditionnelles et indépendance

Vrai ou faux, contrôle antidopage et valeur prédictive, fiabilité d'une alarme, tirages répétés et simulation

Durée : 1 h · sans calculatrice · 4 exercices indépendants · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : / 20

★ CONSIGNES

La calculatrice n'est pas autorisée. Tout résultat doit être justifié par un calcul ou un raisonnement. Les probabilités sont données sous forme décimale ou de fraction irréductible. La qualité de la rédaction est prise en compte dans la notation.

Exercice 1 Vrai ou faux ?

4 pts ●●○

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse (une réponse non justifiée ne rapporte aucun point). A et B désignent deux événements d'une même expérience aléatoire.

- 1.1 Si $P(A) = 0,5$ et $P(B) = 0,6$, alors les événements A et B ne peuvent pas être incompatibles.
- 1.2 Si A et B sont incompatibles et de probabilités non nulles, alors ils sont indépendants.
- 1.3 Si $P(A) = 0,4$, $P_A(B) = 0,3$ et $P(B) = 0,2$, alors $P_B(A) = 0,6$.
- 1.4 Lorsqu'on lance quatre fois une pièce équilibrée, la probabilité d'obtenir autant de « pile » que de « face » est égale à $\frac{1}{2}$.

Exercice 2 Un contrôle antidopage

6 pts ●●○

Lors d'une compétition, les sportifs subissent un test antidopage. Lorsqu'un sportif est dopé, le test est positif dans 90 % des cas ; lorsqu'il ne l'est pas, le test est tout de même positif dans 2 % des cas. On choisit un sportif au hasard ; on note D l'événement « le sportif est dopé » et T l'événement « son test est positif ».

Partie A — Une première compétition

Dans cette partie, on suppose que 5 % des sportifs sont dopés.

- 2.1 Construire un arbre pondéré décrivant la situation, puis démontrer que $P(T) = 0,064$.
- 2.2 Un sportif a un test positif. Démontrer que la probabilité qu'il soit dopé est égale à $\frac{45}{64}$. Ce test est-il fiable pour sanctionner un sportif ? Expliquer la différence entre $P_D(T)$ et $P_T(D)$.
- 2.3 Un sportif dopé subit deux contrôles au cours de la saison ; on admet que leurs résultats sont indépendants. Quelle est la probabilité qu'il échappe aux deux contrôles ?

Partie B — Une proportion inconnue de sportifs dopés

On note maintenant p la proportion de sportifs dopés, avec $0 < p < 1$.

- 2.4 Démontrer que $P(T) = 0,88p + 0,02$, puis que $P_T(D) = \frac{45p}{44p + 1}$. Retrouver le résultat de la question 2.2.

- 2.5 Les instances sportives estiment qu'un test positif est une preuve solide lorsque $P_T(D) \geq 0,9$. Démontrer que cette condition équivaut à $p \geq \frac{1}{6}$. Commenter.

Exercice 3 La fiabilité d'une alarme

5 pts ●●●

Une maison est protégée par deux détecteurs de présence D_1 et D_2 qui fonctionnent indépendamment l'un de l'autre ; l'alarme se déclenche dès qu'au moins un détecteur réagit. En cas d'intrusion, D_1 réagit avec la probabilité 0,9 et D_2 avec la probabilité 0,8.

- 3.1 Une intrusion a lieu. Construire un arbre pondéré (premier niveau : D_1 réagit ou non ; second niveau : D_2 réagit ou non). Calculer la probabilité que les deux détecteurs réagissent, puis démontrer que l'alarme se déclenche avec la probabilité 0,98.
- 3.2 Lors d'une intrusion, l'alarme s'est déclenchée. Quelle est la probabilité que le détecteur D_1 ait réagi ?
- 3.3 En l'absence d'intrusion, D_1 réagit par erreur avec la probabilité 0,01 et D_2 avec la probabilité 0,02, toujours indépendamment. Calculer la probabilité d'une fausse alarme.
- 3.4 L'assureur exige que, lors d'une intrusion, l'alarme se déclenche avec une probabilité d'au moins 0,999. On ajoute des détecteurs identiques à D_2 , qui fonctionnent tous indépendamment les uns des autres. Combien faut-il en ajouter au minimum ?

Exercice 4 Tirages avec remise et simulation

5 pts ●●○

Une urne contient une boule rouge et deux boules vertes, indiscernables au toucher. On effectue quatre tirages successifs d'une boule, en remettant chaque fois la boule tirée dans l'urne.

- 4.1 Justifier que l'on répète quatre épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, dont on précisera le succès et sa probabilité.
- 4.2 Énumérer les chemins de l'arbre qui comportent exactement deux boules rouges. En déduire que la probabilité d'obtenir exactement deux boules rouges est égale à $\frac{8}{27}$.
- 4.3 Calculer la probabilité de n'obtenir aucune boule rouge, puis celle d'obtenir au plus une boule rouge.
- 4.4 On considère les fonctions Python ci-contre ; randint(1, 3) renvoie un entier choisi au hasard parmi 1, 2 et 3. Expliquer pourquoi le test randint(1, 3) == 1 simule le tirage d'une boule rouge. Que renvoie la fonction tirages ?
- 4.5 Compléter la ligne 11 pour que frequence(N) renvoie la fréquence des séries de quatre tirages comportant exactement deux boules rouges, parmi N séries simulées.
- 4.6 L'appel frequence(10000) a renvoyé 0.2981. Ce résultat est-il cohérent avec la question 4.2 ?

```

1 from random import randint
2 def tirages():
3     r = 0
4     for i in range(4):
5         if randint(1, 3) == 1:
6             r = r + 1
7     return r
8 def frequence(N):
9     c = 0
10    for k in range(N):
11        if ..... :
12            c = c + 1
13    return c / N

```