

Approfondissement

Nombre dérivé et tangente

Pour aller plus loin : nombre dérivé de x^n , cordes d'une parabole, tangentes à la cubique, tangentes communes, erreurs d'approximation, méthode de Héron

6 exercices · niveau ●●● · durée conseillée : 2 h 30 · calculatrice autorisée

Exercice 1 Nombre dérivé de $x \mapsto x^n$

●●●

Soit $n \geq 2$ un entier et a un réel. On note p_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $p_n(x) = x^n$.

- 1.1 Vérifier que, pour tous réels u et v : $u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$. Établir de même que $u^n - v^n = (u - v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \dots + uv^{n-2} + v^{n-1})$, la parenthèse comptant n termes.
- 1.2 En appliquant cette égalité avec $u = a + h$ et $v = a$, exprimer le taux de variation de p_n entre a et $a + h$ comme une somme de n termes. En déduire que p_n est dérivable en a et que $p'_n(a) = na^{n-1}$.
- 1.3 Application : déterminer une équation de la tangente à la courbe de $x \mapsto x^5$ au point d'abscisse -1 , puis une valeur approchée de $0,998^5$ et de $1,001^{10}$.
- 1.4 Soit $a \neq 0$. Démontrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est dérivable en a et que son nombre dérivé en a est $-\frac{2}{a^3}$.
La formule na^{n-1} reste-t-elle valable pour $n = -2$?

Exercice 2 Cordes et tangentes d'une parabole

●●●

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, avec $\alpha \neq 0$, et $\mathcal{P}$ sa courbe. On admet (ou on redémontre) que $f'(x_0) = 2\alpha x_0 + \beta$ pour tout réel x_0 . Soit p et q deux réels distincts, P et Q les points de $\mathcal{P}$ d'abscisses p et q .

- 2.1 Montrer que le coefficient directeur de la corde (PQ) est $\alpha(p+q) + \beta$. En déduire que la tangente à $\mathcal{P}$ au point M d'abscisse $\frac{p+q}{2}$ est parallèle à (PQ) .
- 2.2 Montrer que les tangentes à $\mathcal{P}$ en P et en Q se coupent en un point R d'abscisse $\frac{p+q}{2}$.

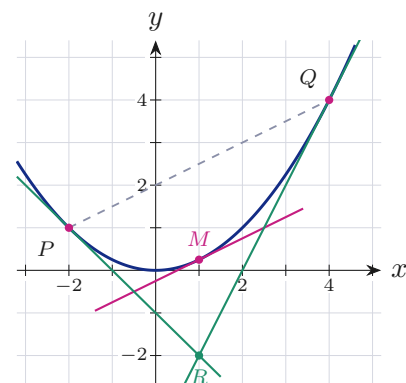


Figure 1 — Cas $f(x) = x^2/4$, $p = -2$, $q = 4$

- 2.3 Vérifier ces deux propriétés sur la figure 1, puis par le calcul dans le cas $f(x) = \frac{x^2}{4}$, $p = -2$, $q = 4$.
- 2.4 Application : on connaît deux points $A(-1; 4)$ et $B(3; 0)$ d'une parabole représentant une fonction polynôme du second degré g , sans connaître g . Donner, sans calcul supplémentaire, le nombre dérivé de g en 1.

Exercice 3 La tangente qui recoupe la cubique

●●●

Soit c la fonction cube, de courbe Γ , et a un réel non nul.

- 3.1 Montrer que $c'(a) = 3a^2$ et que la tangente T_a à Γ au point d'abscisse a a pour équation $y = 3a^2x - 2a^3$.
- 3.2 Vérifier que $x^3 - 3a^2x + 2a^3 = (x - a)^2(x + 2a)$. En déduire que T_a recoupe Γ en un unique autre point, d'abscisse $-2a$, et étudier la position de Γ par rapport à T_a .
- 3.3 On part du point A_0 de Γ d'abscisse 1 ; la tangente en A_0 recoupe Γ en A_1 , la tangente en A_1 recoupe Γ en A_2 , etc. On note x_n l'abscisse de A_n . Montrer que (x_n) est une suite géométrique et exprimer x_n en fonction de n . Calculer l'abscisse de A_{10} .

3.4 Quelle est la tangente à Γ à l'origine ? Montrer que la courbe « traverse » cette tangente.

Exercice 4 Tangentes communes à deux paraboles



Dans un repère, on considère les paraboles $\mathcal{P}_1$ d'équation $y = x^2$ et $\mathcal{P}_2$ d'équation $y = -x^2 + 6x - 5$. On cherche les droites tangentes à la fois à $\mathcal{P}_1$ et à $\mathcal{P}_2$.

- 4.1** Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{P}_1$ au point d'abscisse a , puis de la tangente à $\mathcal{P}_2$ au point d'abscisse b .
- 4.2** Montrer que ces deux droites sont confondues si et seulement si $b = 3 - a$ et $a^2 - 3a + 2 = 0$.
- 4.3** En déduire les équations des tangentes communes à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ et les points de contact. Faire une figure.

Exercice 5 Évaluer l'erreur d'une approximation affine



Soit h un réel proche de 0, avec $h > -1$.

- 5.1** Justifier les approximations affines : $(1 + h)^2 \approx 1 + 2h$, $\frac{1}{1 + h} \approx 1 - h$ et $\sqrt{1 + h} \approx 1 + \frac{h}{2}$.
- 5.2** Étudier l'erreur commise dans chaque cas :
- a) montrer que $(1 + h)^2 - (1 + 2h) = h^2$ et $\frac{1}{1 + h} - (1 - h) = \frac{h^2}{1 + h}$;
 - b) montrer que $\left(1 + \frac{h}{2}\right)^2 - (1 + h) = \frac{h^2}{4}$, puis que $\left(1 + \frac{h}{2}\right) - \sqrt{1 + h} = \frac{h^2}{4\left(1 + \frac{h}{2} + \sqrt{1 + h}\right)}$;
 - c) préciser dans chaque cas s'il s'agit d'une approximation par excès ou par défaut, et expliquer pourquoi l'erreur est « très petite devant h » lorsque h est proche de 0.
- 5.3** *Pourcentages.* Expliquer pourquoi deux hausses successives de 1 % équivalent environ à une hausse de 2 %, et pourquoi une baisse de 2 % se compense environ par une hausse de 2 %. Majorer l'erreur commise dans chaque cas.
- 5.4** *Pendule.* La période d'un pendule simple de longueur ℓ est $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$. De quel pourcentage environ varie la période si l'on allonge le fil de 1 % ?

Exercice 6 Des tangentes pour calculer $\sqrt{2}$ (méthode de Newton)



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2$. Son unique racine positive est $\sqrt{2}$. On part de $x_0 = 2$; la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse x_1 ; on recommence à partir de x_1 , et ainsi de suite (méthode de Newton).

```
1 def heron(n):
2     x = 2
3     for k in range(n):
4         x = (x + 2 / x) / 2
5     return x
```

- 6.1** Montrer que, pour $a > 0$, la tangente au point d'abscisse a coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$.
- 6.2** Calculer x_1 , x_2 et x_3 sous forme de fractions (c'est la méthode de Héron d'Alexandrie). Comparer x_3 à $\sqrt{2}$ à la calculatrice.
- 6.3** Que renvoie `heron(n)` ? Combien de décimales exactes de $\sqrt{2}$ obtient-on avec `heron(4)` ?
- 6.4** Démontrer que, pour tout $a > 0$, $\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) - \sqrt{2} = \frac{(a - \sqrt{2})^2}{2a}$. En déduire que tous les termes x_n sont supérieurs à $\sqrt{2}$ et expliquer pourquoi le nombre de décimales exactes double environ à chaque étape.