

PREMIÈRE SPÉCIALITÉ · MATHÉMATIQUES · CHAPITRE 5

Contrôle B Fonctions dérivées

Dérivée de la fonction inverse, vrai ou faux, retrouver une fonction rationnelle, tangentes issues d'un point

Durée : 1 h · sans calculatrice · 4 exercices indépendants · barème sur 20



R. RINGUET · 2026 – 2027

Nom : Prénom : Classe : Note : / 20

★ CONSIGNES

La calculatrice n'est pas autorisée. Tout résultat doit être justifié ; dans l'exercice 2, une réponse « vrai » ou « faux » non justifiée ne rapporte aucun point. Les résultats sont donnés sous forme exacte. La qualité de la rédaction et la rigueur des démonstrations sont prises en compte dans la notation.

Exercice 1 Démonstration : dérivée de la fonction inverse

4 pts ●●○

On note f la fonction inverse, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$, et $\mathcal{H}$ sa courbe représentative (figure 1). Soit a un réel non nul et h un réel non nul tel que $a + h \neq 0$.

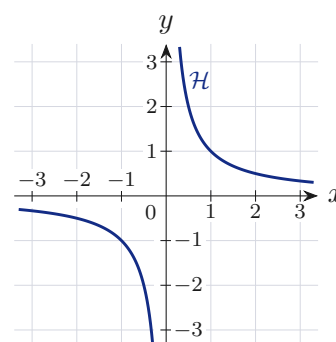
1.1 Démontrer que le taux de variation de f entre a et $a + h$ est égal

$$\text{à } \frac{-1}{a(a+h)}.$$

1.2 En déduire que f est dérivable en a et que $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

1.3 Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{H}$ au point d'abscisse 2, puis les coordonnées de ses points d'intersection avec les axes du repère.

1.4 Déterminer les coordonnées des points de $\mathcal{H}$ en lesquels la tangente a pour coefficient directeur -4 .

Figure 1 — L'hyperbole $\mathcal{H}$

Exercice 2 Vrai ou faux ?

5 pts ●●○

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse.

2.1 Si $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 2)$ pour tout réel x , alors $f'(x) = 6x^3$.

2.2 Si $g(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$ pour tout $x \in]-1; +\infty[$, alors $g'(x) = \frac{1}{3x^2}$.

2.3 Les fonctions u et w définies sur $] -1; +\infty[$ par $u(x) = \frac{x-1}{x+1}$ et $w(x) = \frac{-2}{x+1}$ ont la même fonction dérivée.

2.4 La fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2.5 Si F est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $F'(x) = 2x$ pour tout réel x , alors $F(x) = x^2$ pour tout réel x .

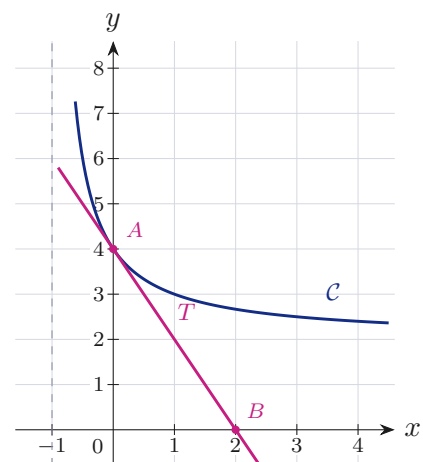
2.6 La tangente à la courbe de la fonction $x \mapsto x\sqrt{x}$ au point d'abscisse 4 passe par le point de coordonnées $(0; -4)$.

Exercice 3 Retrouver une fonction rationnelle

5 pts ●●●○

Soit a et b deux réels et f la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{ax+b}{x+1}$. Sa courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-contre : elle passe par le point $A(0; 4)$, et la tangente T à $\mathcal{C}$ en A passe par le point $B(2; 0)$.

- 3.1** Démontrer que, pour tout $x > -1$, $f'(x) = \frac{a-b}{(x+1)^2}$.
- 3.2** Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$ à l'aide des données. En déduire a et b .
- 3.3** On admet désormais que $f(x) = \frac{2x+4}{x+1}$. Déterminer le point de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x$, puis une équation de cette tangente.
- 3.4** La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle une tangente horizontale ? Justifier.
- 3.5** Vérifier que $f(x) = 2 + \frac{2}{x+1}$ pour tout $x > -1$. En déduire la position de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite d'équation $y = 2$.

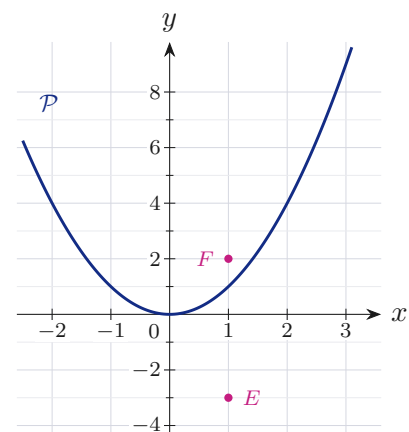
Figure 2 — La courbe $\mathcal{C}$ et la tangente T

Exercice 4 Tangentes à une parabole issues d'un point

6 pts ●●●●

Dans un repère, on note $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$ (figure 3). Pour tout réel a , on note T_a la tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse a .

- 4.1** Démontrer que T_a a pour équation $y = 2ax - a^2$.
- 4.2** On considère le point $E(1; -3)$. Démontrer que T_a passe par E si, et seulement si, $a^2 - 2a - 3 = 0$. En déduire les équations des deux tangentes à $\mathcal{P}$ passant par E , ainsi que les coordonnées de leurs points de contact M et N avec $\mathcal{P}$. Tracer ces tangentes sur une figure analogue.
- 4.3** Démontrer qu'aucune tangente à $\mathcal{P}$ ne passe par le point $F(1; 2)$.
- 4.4** Plus généralement, soit $G(x_0; y_0)$ un point du plan. À quelle condition sur x_0 et y_0 existe-t-il exactement deux tangentes à $\mathcal{P}$ passant par G ? Interpréter graphiquement cette condition à l'aide de la position de G par rapport à $\mathcal{P}$.
- 4.5** Dans le cas de la question précédente, démontrer que le milieu du segment joignant les deux points de contact a pour abscisse x_0 . Vérifier ce résultat sur les points M et N de la question 4.2.

Figure 3 — La parabole $\mathcal{P}$