

Sujet blanc D

Épreuve anticipée de mathématiques

Partie 1 : douze questions d'automatismes — Partie 2 : la boîte de conserve la plus économique, des lancers francs, un cercle et une tangente

Durée : 2 h · sans calculatrice · QCM et 3 exercices · niveau ●●● · barème sur 20

Nom : Prénom : Classe : Note : / 20

★ CONSIGNES

L'usage de la calculatrice est interdit. Le sujet comporte deux parties indépendantes. **Partie 1** : pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte ; indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie, sans justification. Une bonne réponse rapporte 0,5 point ; une mauvaise réponse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. **Partie 2** : les réponses doivent être justifiées ; la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent dans l'appréciation des copies.

Partie 1 — Automatismes (6 points)

Exercice 1 Questionnaire à choix multiples

6 pts ●●○○

- 1.1** Le nombre $\frac{2^{2026} - 2^{2025}}{2^{2024}}$ est égal à : a) 2 b) 1 c) 2^{2025} d) $\frac{1}{2}$
- 1.2** Une série de cinq valeurs a pour moyenne 10 et pour médiane 12. On augmente de 5 la plus grande de ces valeurs. La nouvelle série a pour :
 a) moyenne 10 et médiane 13 b) moyenne 15 et médiane 12
 c) moyenne 11 et médiane 12 d) moyenne 11 et médiane 13
- 1.3** Pour tout réel x , l'expression $x^3 - 2x^2 - x + 2$ est égale à :
 a) $(x + 2)(x - 1)(x + 1)$ b) $(x - 2)(x - 1)(x + 1)$
 c) $(x - 2)(x^2 + 1)$ d) $(x - 2)^2(x + 1)$
- 1.4** L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $(x^2 + 1)(3 - x) > 0$ est :
 a) $] -1 ; 3[$ b) $] 3 ; +\infty[$ c) $] 1 ; 3[$ d) $] -\infty ; 3[$
- 1.5** L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $e^{x^2} = e^{3x-2}$ est :
 a) $\{1 ; 2\}$ b) $\{-2 ; -1\}$ c) $\{1\}$ d) $\emptyset$
- 1.6** Un prix a subi deux hausses successives de $t\%$, soit une hausse globale de 69% . Le réel t est égal à :
 a) 34,5 b) 69 c) 30 d) 13
- 1.7** Dans une classe, 40% des élèves sont des garçons ; 25% des garçons et 50% des filles pratiquent la musique. La proportion d'élèves de la classe qui pratiquent la musique est :
 a) $37,5\%$ b) 40% c) 75% d) 35%
- 1.8** La somme $1 + 3 + 5 + \dots + 99$ des nombres impairs de 1 à 99 est égale à :
 a) 5 000 b) 2 450 c) 4 950 d) 2 500

1.9 La courbe ci-contre est celle de la fonction **dérivée** f' d'une fonction f définie sur $[-2; 3]$. La fonction f admet un maximum local en :

- a) -1 b) 0 c) 2 d) $\frac{1}{2}$

1.10 Deux vecteurs vérifient $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$. Alors $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ est égal à :

- a) 7 b) $\sqrt{13}$ c) $\sqrt{37}$ d) 13

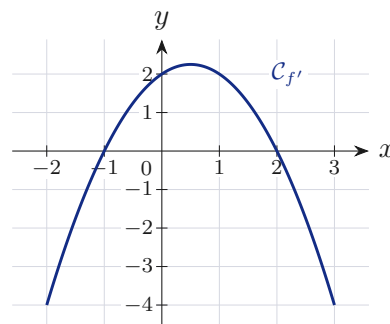


Figure 1 — Courbe de f' (question 1.9)

1.11 Dans un repère orthonormé, le cercle d'équation $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ passe par le point :

- a) $(2; 2)$ b) $(-2; 1)$ c) $(5; 2)$ d) $(0; 0)$

1.12 Une maladie touche 10 % d'une population. Un test est positif chez 90 % des malades et chez 10 % des personnes non malades. Une personne dont le test est positif est choisie au hasard. La probabilité qu'elle soit malade est :

- a) $0,9$ b) $0,09$ c) $0,18$ d) $0,5$

Partie 2 — Exercices (14 points)

Exercice 2 La boîte de conserve la plus économique

5 pts ●●●

Une conserverie fabrique des boîtes cylindriques fermées de volume $128\pi \text{ cm}^3$ (environ 0,4 L). Pour économiser le métal, elle cherche les dimensions qui rendent minimale l'aire totale de la boîte (fond, couvercle et paroi latérale). On note r le rayon de la base et h la hauteur, en centimètres, avec $0 < r \leq 8$.

2.1 Exprimer h en fonction de r .

2.2 On note $S(r)$ l'aire totale de la boîte, en cm^2 . Montrer que $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{256\pi}{r}$.

2.3 Montrer que, pour tout $r \in]0; 8]$, $S'(r) = \frac{4\pi(r^3 - 64)}{r^2}$.

2.4 a) Vérifier que, pour tout réel r , $r^3 - 64 = (r - 4)(r^2 + 4r + 16)$.
b) En déduire le signe de $S'(r)$ sur $]0; 8]$, puis dresser le tableau de variations de S sur $]0; 8]$ (sans limite en 0).

2.5 En déduire les dimensions de la boîte la plus économique et l'aire de métal correspondante. Comparer sa hauteur et son diamètre.

2.6 On généralise : le volume de la boîte est maintenant un réel $V > 0$ quelconque. Exprimer l'aire totale $S(r)$ en fonction de r et de V , puis montrer que $S'(r) = 0$ si, et seulement si, $r^3 = \frac{V}{2\pi}$. On admet que S est minimale pour cette valeur de r ; démontrer qu'alors la hauteur de la boîte est égale à son diamètre.

Exercice 3 Des lancers francs

5 pts ●●●

Une basketteuse réussit chacun de ses lancers francs avec la probabilité 0,8, les lancers étant indépendants les uns des autres. Lors d'une séance, elle effectue une série de 3 lancers francs. On note X le nombre de lancers réussis au cours de la série.

3.1 Représenter la situation par un arbre pondéré, puis calculer la probabilité qu'elle réussisse les trois lancers.

3.2 Déterminer la loi de probabilité de X .

3.3 Calculer l'espérance $E(X)$, puis montrer que la variance de X est $V(X) = 0,48$.

3.4 Sachant que la joueuse a réussi exactement deux lancers de la série, quelle est la probabilité qu'elle ait manqué le premier ?

- 3.5** Au cours d'un match, elle effectue quatre séries de trois lancers francs, indépendantes. On note X_1, X_2, X_3, X_4 les nombres de réussites de chaque série. Quelle est l'espérance du nombre total de lancers réussis au cours du match ? Justifier.

```

1 from random import random
2
3 def serie():
4     x = 0
5     for k in range(3):
6         if random() < 0.8:
7             x = x + 1
8     return x
9
10 def frequence(n):
11     c = 0
12     for i in range(n):
13         if serie() == 3:
14             c = c + 1
15     return c / n

```

- 3.6** On rappelle que `random()` renvoie un nombre aléatoire de $[0; 1[$, et que `random() < 0.8` est vrai avec une probabilité égale à 0,8.

- Que renvoie la fonction `serie` ci-contre ?
- Que renvoie `frequence(n)` ? Au voisinage de quelle valeur peut-on s'attendre à obtenir le résultat de `frequence(10000)` ?
- Modifier une ligne de la fonction `frequence` pour qu'elle renvoie la fréquence des séries comportant exactement deux réussites.

Exercice 4 Un cercle et une tangente

4 pts ●●●

Dans un repère orthonormé, on considère l'ensemble Γ des points $M(x; y)$ tels que

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0.$$

- Montrer que Γ est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon.
- Vérifier que le point $A(5; 3)$ appartient à Γ , puis déterminer une équation cartésienne de la tangente T à Γ en A .
- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de Γ avec la droite d d'équation $x = -1$.
- Le point A' est diamétralement opposé à A sur Γ . Calculer ses coordonnées et vérifier que A' est l'un des points trouvés à la question 4.3. Déterminer une équation de la tangente à Γ en A' .
- On considère la droite Δ d'équation $x - 2y + 6 = 0$.
 - Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal de Ω sur Δ .
 - Calculer la distance ΩH . La droite Δ coupe-t-elle le cercle Γ ? Justifier.

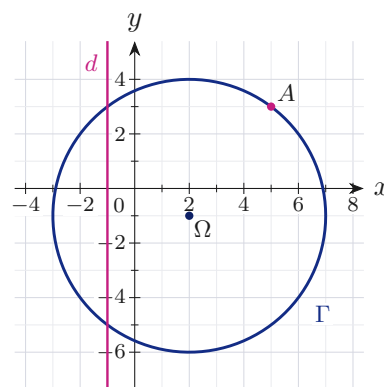


Figure 2 — Le cercle Γ et la droite d